PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 6 heures

- **Notations et rappels :**

1. L'expression « série entière » signifiera « série entière à coefficients complexes ».

2. Pour tout $(a, R) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$, on note $\dot{D}(a; R)$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - a| < R$.

3. On notera $\mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (respectivement, $\mathscr{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$) l'ensemble des fonctions continues f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ (respectivement, de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{C}$) telles que pour tout (x, n) appartenant à $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ (respectivement, à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}^2$) on ait :
$$f(x + n) = f(x).$$

4. Soit n un entier $\geqslant 1$ et soit F une fonction continue de $|0,1|^n$ vers $\mathbb{C}$.

On admettra que l'on définit par récurrence sur l'entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ une suite de fonctions continues $G_k : |0,1|^{n-k} \longrightarrow \mathbb{C}$ en posant :
$$G_0 = F$$
$$G_k(x_1, \ldots, x_{n-k}) = \int_0^1 G_{k-1}(x_1, \ldots, x_{n-k}, t)\, dt.$$

et l'on posera :
$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_0^1 G_{n-1}(t)\, dt.$$

On admettra de plus que, pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, on a :
$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\, dx_1 \ldots dx_n = \int_0^1 \ldots \int_0^1 F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Ces énoncés étendent aux fonctions de n variables la définition et les propriétés des intégrales doubles et triples.

5. On admettra l'inégalité suivante :

Si $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ est une matrice complexe à d lignes et d colonnes, on a :
$$|\det A|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} |a_{ij}|^2 \right).$$

PREMIÈRE PARTIE

I.1. On dit qu'une application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ est une *fonction entière* s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence infini telle que : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

I.1.*a*. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière et soit $a \in \mathbb{C}$.

Montrer que, pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $z \in \dot{D}(a; R)$, on a :
$$f(z) = \int_0^1 f(a + Re^{2\pi i\theta}) \frac{Re^{2\pi i\theta}}{a + Re^{2\pi i\theta} - z}\, d\theta.$$

(On pourra commencer par montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| < 1$, on a :
$$\int_0^1 \frac{e^{2\pi ik\theta}}{1 - e^{-2\pi i\theta} w}\, d\theta = w^k.)$$

A SUIVRE

I.1.*b.* Montrer que la fonction : $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z + a)$ est une fonction entière.

I.1.*c.* Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une fonction entière $\tilde{f}$ telle que :

$$\tilde{f}(a) \neq 0 \qquad \text{et :} \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (z - a)^n \tilde{f}(z).$$

I.1.*d.* Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors pour toute partie compacte K de $\mathbb{C}$, l'ensemble :

$\{z \in K \mid f(z) = 0\}$ est fini.

I.2.

I.2.*a.* Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est supérieur ou égal à R. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe une unique série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R telle que, si l'on pose, pour tout $z \in \dot{D}(0; R)$:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \qquad \text{et} \qquad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

alors on ait : $\forall z \in \dot{D}(0; R),\ A'(z) = B(z)\,A(z)$ et $A(0) = \lambda$.

(On pourra exprimer ces conditions sous forme de relations entre les coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis montrer que ces relations déterminent uniquement $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et que, si $(C, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sont tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |b_n| \leqslant C r^{-n}$$

alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leqslant |\lambda| r^{-n} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{Cr - 1}{i}\right)$.)

I.2.*b.* Montrer que pour toute série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R, il existe une unique série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R telle que : $\forall z \in \dot{D}(0; R),\ g(z) = e^{f(z)}$.

I.3. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à R telle que :

$$\forall z \in \dot{D}(0; R),\ f(z) \neq 0.$$

I.3.*a.* On pose, pour tout $(r, \theta) \in]0, R[\times \mathbb{R}$, $F(r, \theta) = f(r e^{2\pi i \theta})$.

Montrer que F est une fonction continue sur $]0, R[\times \mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $]0, R[\times \mathbb{R}$ et que :

$$\forall (r, \theta) \in]0, R[\times \mathbb{R},\ r \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{i}{2\pi} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

I.3.*b.* Montrer qu'il existe une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de fonctions continues de $[0, R[$ vers $\mathbb{R}$, dérivables sur $]0, R[$ telles que :

$$\forall (r, \theta) \in]0, R[\times \mathbb{R},\ \frac{1}{F(r, \theta)} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} B_n(r) e^{2\pi i n \theta}.$$

Quelle équation différentielle la fonction B_n vérifie-t-elle ?

Tournez la page S.V.P.

I.3.*c.* Montrer qu'il existe une unique série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R telle que :

$$\forall z \in \dot{D}(0; R),\ f(z)\, g(z) = 1.$$

I.3.*d.* Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que : $e^a = f(0)$,

il existe une unique série entière $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R telle que : $h(0) = a$ et que : $\forall z \in \dot{D}(0; R),\ e^{h(z)} = f(z)$.

DEUXIÈME PARTIE

II.1. Pour tout $h \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ et tout $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, on pose :

$$K_h(\varphi) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto \int_0^1 h(x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

II.1.*a.* Vérifier que l'on définit ainsi un endomorphisme K_h de l'espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

II.1.*b.* Dans la suite de cette partie, on désigne par f un élément de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction $\Lambda^n f : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}$ en posant :

$$\Lambda^n f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \det\left(f(x_i, y_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Donner une majoration de $|\Lambda^n f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)|$ en termes de n et de $\sup_{(x,y) \in [0,1]^2} |f(x, y)|$.

II.1.*c.* Montrer que la série $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Lambda^n f(t_1, \ldots, t_n, t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n$

converge. On notera sa somme $D(f)$.

Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la série :

$$f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Lambda^{n+1} f(x, t_1, \ldots, t_n, y, t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n$$

converge et que sa somme $m(x, y)$ définit une fonction de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui appartient à $\mathscr{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$.

II.1.*d.* Établir les identités suivantes, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$m(x, y) + \int_0^1 f(x, t)\, m(t, y)\, dt = D(f)\, f(x, y).$$

$$m(x, y) + \int_0^1 m(x, t)\, f(t, y)\, dt = D(f)\, f(x, y).$$

II.1.*e.* Montrer que lorsque $D(f) \neq 0$, $\mathrm{Id} + K_f$ est un endomorphisme bijectif de $\mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et que l'endomorphisme $(\mathrm{Id} + K_f)^{-1} - \mathrm{Id}$ est de la forme K_e, où e désigne un élément de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ que l'on explicitera.

II.2. II.2.*a.* Montrer que la fonction :

$$\Delta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto D(zf)$$

est une fonction entière.

A SUIVRE

II.2.*b.* Montrer que la restriction de Δ à $\mathbb{R}$ admet comme dérivée en 1 : $\Delta'(1) = \int_0^1 m(x,x)dx$.

Montrer aussi que, si $D(f) \neq 0$, alors l'application $(Id + K_f)^{-1} \circ K_f$ est de la forme K_σ, où $\sigma \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$, et l'on a :

$$\frac{\Delta'(1)}{\Delta(1)} = \int_0^1 \sigma(x,x)dx.$$

II.3.

II.3.*a.* Montrer qu'il existe une fonction $I \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ telle que $I(0) = 0$ et que, pour tout élément ψ de $K_f(\mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\psi(x) - \psi(0)| \leqslant C\, I(x).$$

II.3.*b.* Montrer que l'application K_f n'est pas surjective.

II.3.*c.* On appelle spectre de K_f, et on note $Sp\ K_f$, la partie de $\mathbb{C}$ formée des nombres complexes λ tel que l'endomorphisme $\lambda\ Id - K_f$ de l'espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ne soit pas bijectif.

Montrer que $Sp\ K_f$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

TROISIEME PARTIE

Soit $\mathscr{H}$ un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien $< .,. >$. On note $\|.\|$ la norme sur $\mathscr{H}$ associée et $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'algèbre des applications linéaires continues de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{H}, \|.\|)$ dans lui-même. Pour tout $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, on pose :

$$|||T||| = \sup_{\substack{u \in \mathscr{H} \\ \|u\| \leqslant 1}} \|Tu\|.$$

III.1. On appelle $\mathscr{L}^1(\mathscr{H})$ l'ensemble des applications linéaires T de $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{H}$ telles qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{H}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(Tr 1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| \|v_n\| < +\infty ;$$

(Tr 2) $$\forall v \in \mathscr{H},\ \lim_{N \to +\infty} \|Tv - \sum_{n=0}^{N} < u_n, v > v_n\| = 0.$$

Pour tout $T \in \mathscr{L}^1(\mathscr{H})$, on désigne par $\|T\|_1$ la borne inférieure de l'ensemble suivant :

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| \|v_n\| \;\middle|\; (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ satisfont à (Tr 1) et (Tr 2)} \right\}$$

III.1.*a.* Montrer que l'ensemble $\mathscr{L}^1(\mathscr{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ et que l'on a :

$$\forall T \in \mathscr{L}^1(\mathscr{H}),\ |||T||| \leqslant \|T\|_1.$$

III.1.*b.* Montrer que $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathscr{L}^1(\mathscr{H})$.

III.1.*c.* Montrer que, pour tout $(T, T') \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \times \mathscr{L}^1(\mathscr{H})$, on a :

$$T \circ T' \in \mathscr{L}^1(\mathscr{H}) \quad \text{et} \quad \|T \circ T'\|_1 \leqslant |||T|||\ \|T'\|_1.$$

Tournez la page S.V.P.

III.2. On suppose maintenant qu'il existe une suite orthonormale $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathscr{H}$ telle que :

$$\forall\, v \in \mathscr{H},\ \| v \|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} | < e_k, v > |^2$$

III.2.*a.* Montrer que, pour tout $(v_1, v_2) \in \mathscr{H}^2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} | < e_k, v_1 > | \ | < e_k, v_2 > | < + \infty$$

et

$$< v_1, v_2 > = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{< e_k, v_1 >} < e_k, v_2 > .$$

III.2.*b.* Soit $T \in \mathscr{L}^1(\mathscr{H})$ et soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de vecteurs de $\mathscr{H}$ satisfaisant aux conditions (Tr 1) et (Tr 2). Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} | < u_n, v_n > | < + \infty ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} | < e_k, Te_k > | < + \infty ,$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} < u_n, v_n > = \sum_{k=0}^{\infty} < e_k \mid Te_k >$$

On notera Tr T la valeur commune des deux membres de cette égalité. Vérifier qu'elle ne dépend que de T, et non pas du choix des $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ni de celui de $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

III.2.*c.* Comparer $|\mathrm{Tr}\ T|$ et $\|T\|_1$. Les normes $\| \cdot \|_1$ et $||| \cdot |||$ sur $\mathscr{L}^1(\mathscr{H})$ sont-elles équivalentes ?

II.3. On suppose dans la suite de cette partie que $\mathscr{H} = \mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et que :

$$< f, g > = \int_0^1 \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t .$$

III.3.*a.* Vérifier que les hypothèses de la question III.2. sont satisfaites.

III.3.*b.* Soit f un élément de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ tel que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ existent et définissent des fonctions continues de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que K_f appartient à $\mathscr{L}^1(\mathscr{H})$ et que :

$$\mathrm{Tr}\, K_f = \int_0^1 f(x, x)\, \mathrm{d}x .$$

(On pourra considérer les fonctions $f_n \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ définies par :

$$f_n(x) = \int_0^1 e^{-2\pi i n y} f(x, y)\, \mathrm{d}y .)$$

A SUIVRE

III.3.*c.* Montrer que, si l'on pose $\Delta_f(z) = D(zf)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (cf. II.2.*a.*) et si l'on note $\Delta_f'(t)$ la dérivée en un point $t \in \mathbb{R}$ de la restriction à $\mathbb{R}$ de Δ_f, alors on a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \Delta_f(t) \neq 0 \implies \frac{\Delta_f'(t)}{\Delta_f(t)} = \mathrm{Tr}[(\mathrm{Id} + t\,K_f)^{-1} \circ K_f].$$

III.3.*d.* Que dire de $D(f)$ lorsque $\mathrm{Id} + K_f$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ inversible dans $\mathscr{L}(\mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$?

III.3.*e.* Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, K_f^n appartient à $\mathscr{L}^1(\mathscr{H})$ et que le rayon de convergence R de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathrm{Tr}(K_f^n)\, z^n$$

est strictement positif. Pour tout $z \in \mathring{D}(0; R)$, on note $T_f(z)$ la somme de cette série.

III.3.*f.* Montrer que :

$$\forall\, z \in \mathring{D}(0; R),\ e^{T_f(z)} = \Delta_f(z).$$

III.3.*g.* On note $\tilde{\mathrm{Sp}}\, K_f$ la partie de $\mathbb{C}$ formée des nombres complexes λ tels que l'endomorphisme $\lambda\,\mathrm{Id} - K_f$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ne soit pas inversible dans $\mathscr{L}(\mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$. Exprimer R en fonction de $\tilde{\mathrm{Sp}}\, K_f$.

III.4. Soit φ un élément de $\mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ de classe C^2 et soit f la fonction de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ définie par $f(x, y) = \varphi(x - y)$.

III.4.*a.* Exprimer $\mathrm{Tr}\, K_f^n$ au moyen des coefficients de Fourier :

$$\hat{\varphi}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi i k x}\, \varphi(x)\,dx. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

III.4.*b.* Établir, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'égalité suivante :

$$\lim_{N \to +\infty} \prod_{k=-N}^{N} (1 + z\,\hat{\varphi}(k)) = \Delta_f(z).$$

Ce résultat peut-il s'étendre à des fonctions $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ qui ne sont pas de classe C^2 ?

FIN